REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE CURVAS - II

1.- Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{|x^2-1|}{x}$

a) Dominio: f(x) es el cociente del valor absoluto de una función polinómica de 2º grado entre la variable x. Ambas son continuas en todo R, pero cuando se anule el denominador habrá puntos de no dominio. Así Dom f= R-$\{0\}$.

Además, transformamos esta definición en otra más práctica, sin valor absoluto, para estudiar con más comodidad:

$$f(x) = \frac{|x^2-1|}{x} = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x} & si\ x^2-1 \geq 0 \\ \dfrac{-(x^2-1)}{x} & si\ x^2-1 < 0 \end{cases}$$

Resolvemos la inecuación $x^2-1 \geq 0$. Para ello, igualamos a 0 la ecuación de 2º grado y tenemos x=-1 y x=1. Vamos a ver el signo que toma el polinomio en los 3 intervalos determinados en la recta real por las soluciones de la ecuación:

(+) -1 (-) +1 (+)

X_1= -10 x_2=0 x_3= 10

Probamos los tres puntos anteriores y tenemos que:

Para x_1=-10 y para x_3= 10 el polinomio es mayor que cero y negativo en el caso de x_2=0

Por tanto, nuestra curva se transformará en :

$$f(x) = \frac{|x^2-1|}{x} = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x} & si\ x \leq -1 \\ \dfrac{-(x^2-1)}{x} & si\ -1 < x < 1 \\ \dfrac{x^2-1}{x} & si\ 1 \leq x \end{cases}$$

b) Asíntotas:

- A Verticales: f(x)=∞. Hay asíntotas verticales cuando se anule el denominador. **X=0. Afectará al 2º trozo de la curva.**

Los límites cuando x tiende a infinito afectarán al primer y tercer tramo de la curva, pero no al 2º, que está limitado alrededor del origen de coordenadas. Estudiamos solo para estos las asíntotas horizontales y posibles oblicuas que haya.

- A Horizontales:

$$y = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \infty \text{ por comparación de grados}$$

$y = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x} = \frac{\infty}{-\infty} = \infty$ por comparación de grados

No hay, por tanto, asíntotas horizontales.

- A oblicua: y=mx+n, donde

$\boldsymbol{m} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = 1$ Puede haber asíntota oblicua.

Calculamos la ordenada en el origen "n":

$$\boldsymbol{n} = \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-1}{x} - x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{-1}{x}\right] = 0$$

Por tanto, hay una asíntota oblicua, cuya ecuación es **y=x** (bisectriz del primer y tercer cuadrante).

c) Simetrías: Hacemos el cambio de signo a las dos definiciones de la función:

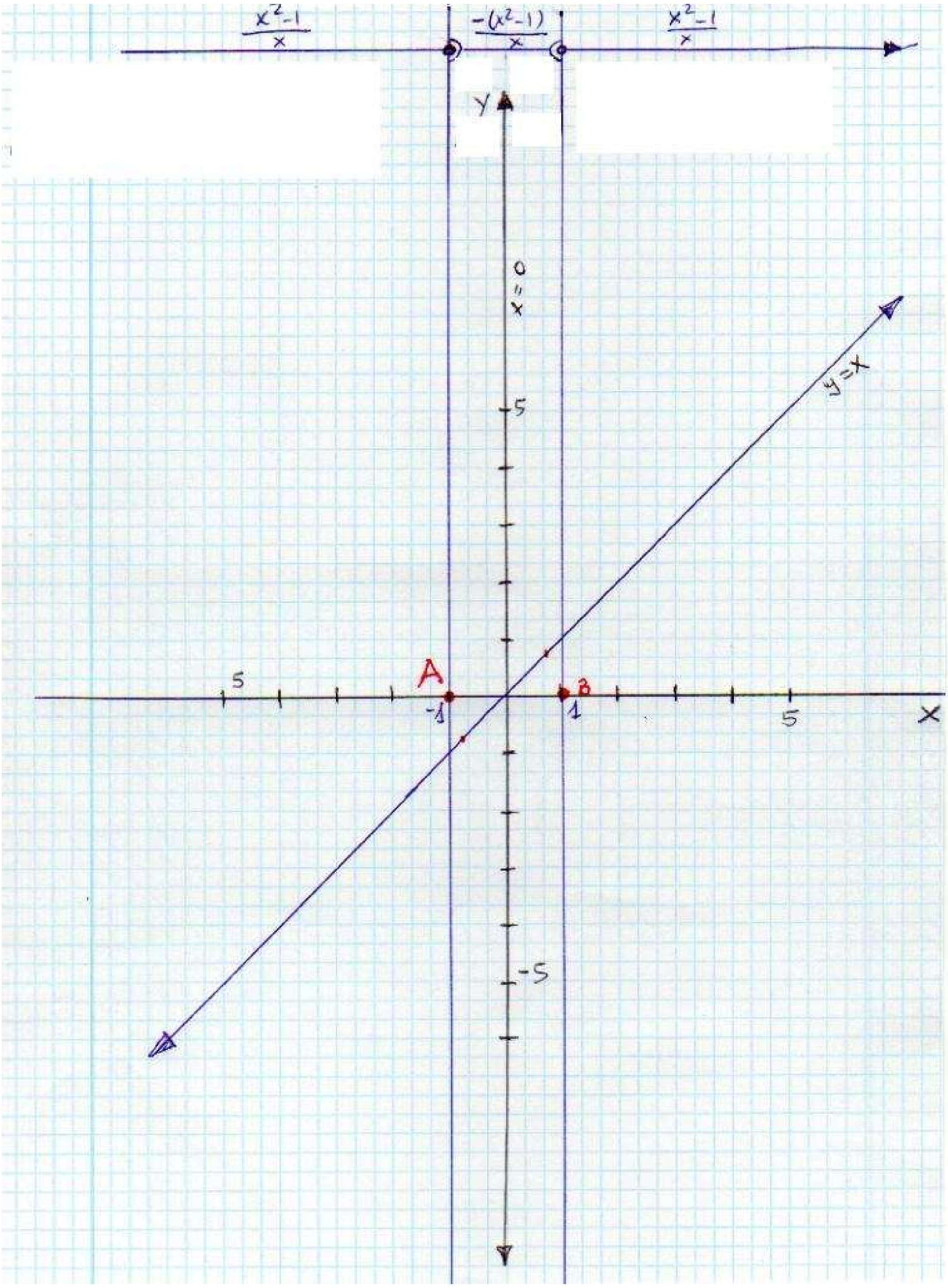
$$f(-x) = \frac{|(-x)^2 - 1|}{-x} = \frac{|x^2-1|}{-x} = -\frac{|x^2-1|}{x} = -f(x)$$

Por tanto, f(x) será impar, simétrica respecto al origen de coordenadas.

d) Corte con ejes:

Vert: x=0 $\notin$ $Dom\,f$ No puede cortar a OY

Horizontal: y=0; f(x)=0: $f(x) = \frac{|x^2-1|}{-x} = 0$. Igualando el numerador a 0 nos salen dos soluciones x=-1 y x=1, dando los puntos **A(-1,0) y B(1,0)**, que corresponden, lógicamente a los puntos donde la curva cambia de definición. Como hay ya bastante información (asíntotas, cambios de definición…) vamos a empezar a trasladarlo a un sistema de ejes de coordenadas:



e) Periodicidad. Esta función no es periódica.

f) Máximos y mínimos. Estudio de la 1ª derivada. Calculamos f'(x):

Primero derivamos la fracción y= $\frac{x^2-1}{x}$ que nos da $y' = \frac{2x \cdot x - 1(x^2-1)}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$, que nos valdrá para las diferentes ramas de la curva, cambiando el signo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x} & si\ x \le -1 \\ \frac{-(x^2-1)}{x} & si\ -1 < x < 1 \\ \frac{x^2-1}{x} & si\ 1 \le x \end{cases} \quad ; \qquad f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x^2} & si\ x < -1 \\ -\frac{x^2+1}{x^2} & si\ -1 < x < 1 \\ \frac{x^2+1}{x^2} & si\ 1 < x \end{cases}$$

En los extremos relativos f'(x)=0. Igualamos a 0 el numerador de la expresión anterior y tendremos:

$$(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \notin R$$

No se anula la primera derivada en ningún caso, por lo tanto no habrá máximos ni mínimos relativos.

Estudiamos la monotonía para ver su crecimiento y decrecimiento:

g) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:

Tendremos en cuenta: Dom f= R –{0}
Asíntotas verticales: x=0
Cambio de definición: x=-1, x=+1
Extremos relativos: No hay

La recta real queda dividida en cuatro intervalos, como en la figura. Tomamos un punto en cada uno de ellos para calcular el signo de la derivada:

-1 0 +1

X_1= -10 | x_2=-1/2 | x_3=1/2 | x_4= 10

$f'(-10) = \frac{(-10)^2+1}{(-10)^2} > 0$ ↗ 1ª Rama de la derivada de la curva(sin signo "-")

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} < 0$ ↘ 2ª Rama de la derivada de la curva (con signo "-")

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} < 0$ ↘ 2ª Rama de la derivada de la curva (con signo "-")

$f'(10) = \frac{(10)^2+1}{(10)^2} > 0$ ↗ 3ª Rama de la derivada de la curva (sin signo "-" nuevamente)

Por tanto, los intervalos de crecimiento serán:

f(x) es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

f(x) es decreciente en (-1,0) ∪ (0,1)

h) 2ª Derivada. Puntos de inflexión:

Hallamos en primer lugar la 2ª derivada de la fracción sola, sin signo:

$y' = \frac{x^2+1}{x^2}$; $y'' = \frac{2x\cdot x^2 - 2x\cdot(x^2+1)}{(x^2)^2} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$

Por tanto, $f''(x) = \begin{cases} \frac{-2}{x^3} \ \ si\ x < -1 \\ \frac{+2}{x^3} \ \ si\ -1 < x < 1 \\ \frac{-2}{x^3} \ \ si\ x < 1 \end{cases}$

Al intentar igualar a 0 para calcular los puntos de inflexión observamos que el numerador es un número real, que nunca se anulará, por tanto no habrá puntos de inflexión

i) Intervalos de concavidad y convexidad:

Tendremos en cuenta: Dom f= R –{0}

Asíntotas verticales: x=0

Cambio de definición: x=-1, x=+1

Puntos de inflexión: No hay

-1 0 +1

$X_1 = -10$ | $x_2 = -1/2$ | $x_3 = 1/2$ | $x_4 = 10$

Nos sirven los mismos puntos de antes para estudiar el signo de la 2ª derivada:

$$f''^{(x)} = \begin{cases} \frac{-2}{x^3} \ \ si\ x < -1 \\ \frac{+2}{x^3} \ \ si\ -1 < x < 1 \\ \frac{-2}{x^3} \ \ si\ x < 1 \end{cases}$$

$f''(-10) = \frac{-2}{(-10)^3} > 0$: Convexa

$f''(-1/2) = \frac{2}{(-1/2)^3} < 0$: Cóncava

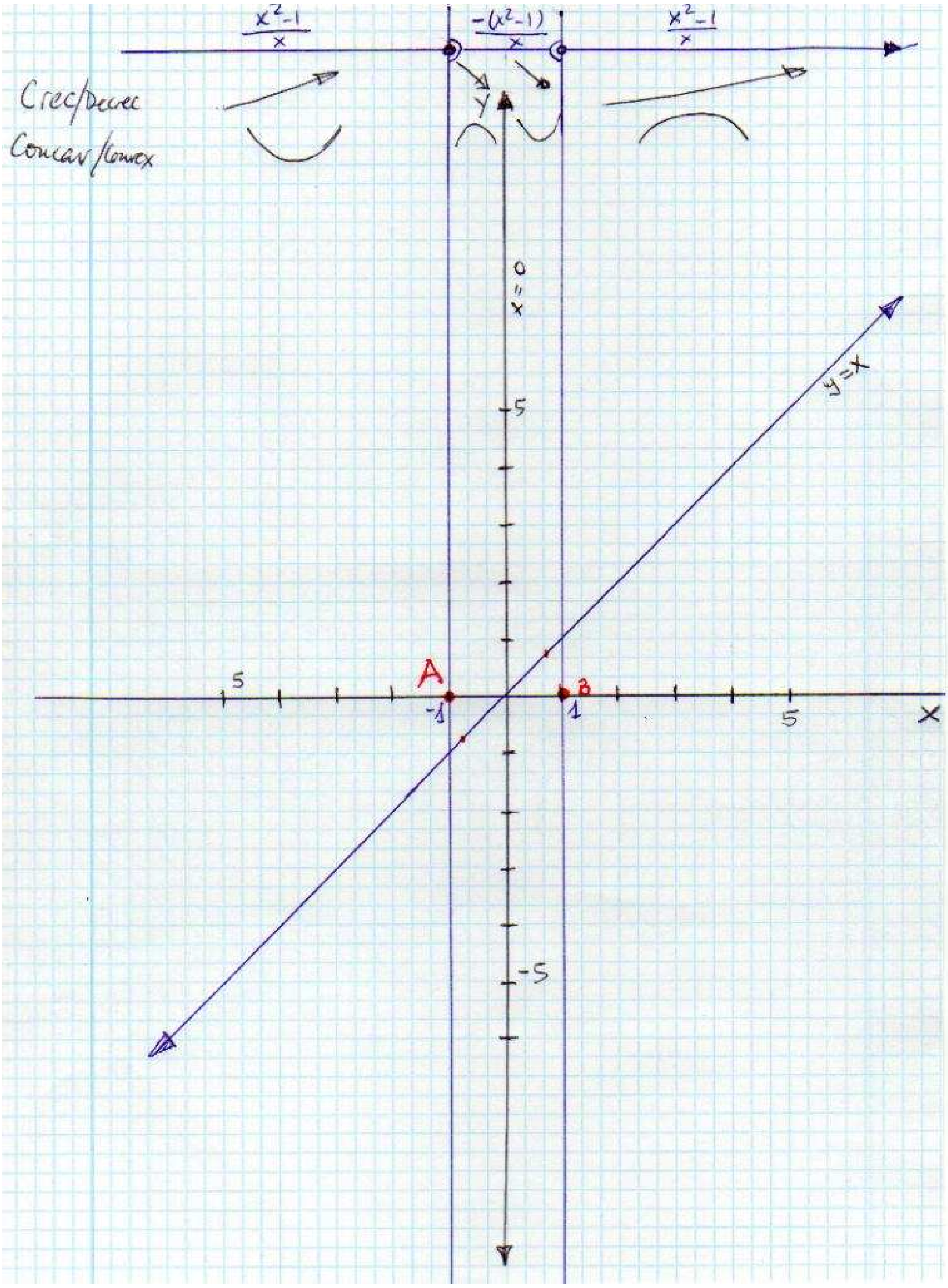
$f''(1/2) = \frac{2}{(1/2)^3} > 0$: Convexa

$f''(10) = \frac{-2}{(10)^3} < 0$: Cóncava

f(x) es convexa en $(-\infty, -1) \cup (0,1)$

f(x) es cóncava en (-1,0)U$(1, \infty)$

Si pasamos esta nueva información a la gráfica que hemos comenzado a elaborar, tendremos:



x²-1 / x
-(x²-1) / x
x²-1 / x
Crec/Decrec
Concav/Convex
y
x = 0
y = x
5
-5
A
B
-1
1
5
X

Concluyendo, la representación gráfica de esta curva es: